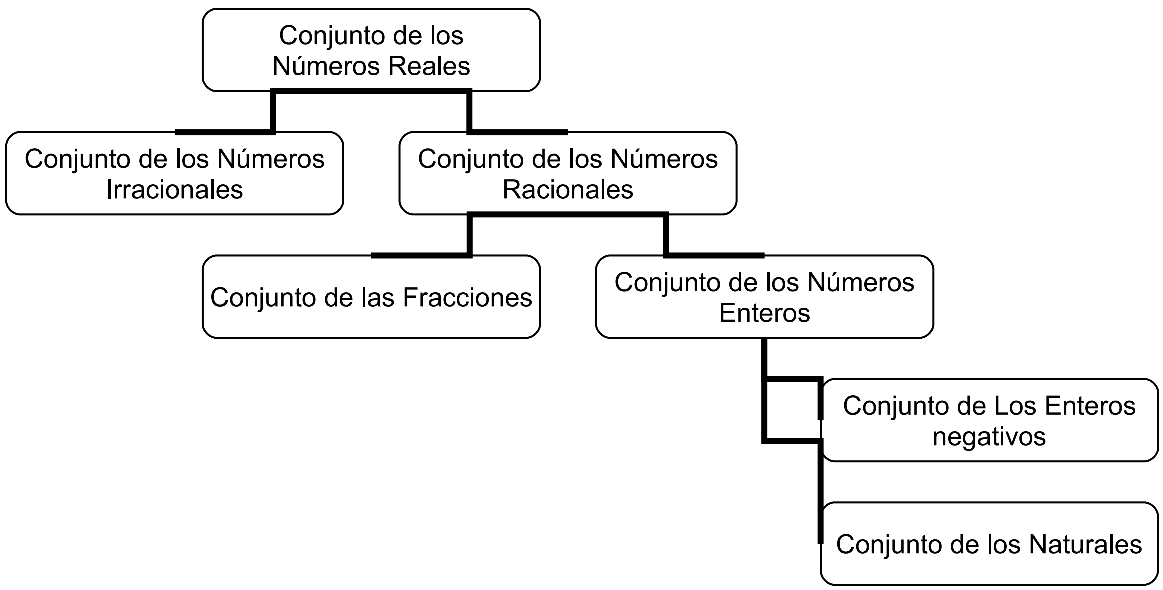
Conjuntos Numéricos

Los conjuntos que revisten una gran importancia dentro de las matemáticas, son los conjuntos numéricos, y es primordial el estudio de las diferentes propiedades y operaciones que pueden definirse entre ellos.

Mapa conceptual del conjunto de los números



A través del desarrollo histórico, el hombre se ha venido organizando cada vez más en el aspecto social, y en ese proceso de transformación y de organización social ha tenido que descubrir y crear herramientas que le permitan dar una explicación a los eventos propios de dicho avance.

El ser humano inicialmente contaba o enumeraba los objetos y cosas de la naturaleza, posteriormente, empezó a producir o colectar mas de lo que necesitaba para subsistir y entonces se vio en la necesidad de establecer trueques y ventas con los productos que, de alguna manera, sobraban y no eran trascendentes para él. Con estas actividades de intercambio, se inicia cierta forma de comercio y con éste, el registro de ésta nueva actividad para poder ejercer control sobre la misma.

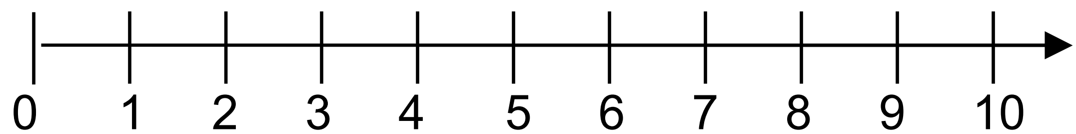
Estos procesos se van a perfeccionar aún más con la creación de las cantidades negativas, que posteriormente con la aparición de las fracciones, y la posibilidad de expresar estas últimas en forma decimal, van a constituir lo que conocemos como expresiones o números reales. Podemos decir que en ese devenir histórico se han venido construyendo paulatinamente cada uno de los conjuntos numéricos, partiendo de los naturales hasta los reales.

Conjunto de los Números Naturales

El hombre al tener percepción y conciencia de los objetos y cosas de la naturaleza, crea la necesidad de contar o enumerar dichos elementos, desprendiéndose implícitamente de allí el concepto de número natural. Los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, … constituyen el conjunto de los números naturales, el cuál se denota con la letra N.

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

Los naturales son un conjunto ordenado el cuál se acostumbra a representar sobre una semirrecta que se extiende a la derecha, a intervalos igualmente espaciados, y denominada semirrecta natural:



Con la utilización de este conjunto se resuelven ecuaciones sencillas como por ejemplo:

$$X + 3 = 7; \text{ donde } X = 4, \ 4 \in N$$

En relación con lo anterior, hallemos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. La cantidad de artículos en un proceso de producción es un número natural (V)
b. La cantidad de empleados en un proceso de producción es un número natural (V)
c. La cantidad de un sobregiro en una cuenta corriente es un número natural (F)

Fundamentos de matemáticas

Podemos efectuar algunas operaciones entre los conjuntos numéricos, como la suma y la multiplicación.

$103.456 + 207.002 = 310.458$, donde $310.458 \in N$

$25.475 * 765 = 19.694.925 \in N$

No obstante al efectuar:

$105.823 - 285.465 = -179.642$, donde $-179.642 \notin N$

$245.348 \div 125 = 1.962,784 \notin N$

Esto debido a que la resta y la división no son posibles en todos los casos, es decir no son cerradas en este conjunto.

La sencilla ecuación $X + 3 = -7$ no tiene solución en los naturales, para resolverla se hace necesario la existencia de opuestos, por lo tanto su solución se obtiene en otro conjunto numérico.

Conjunto de los Números Enteros

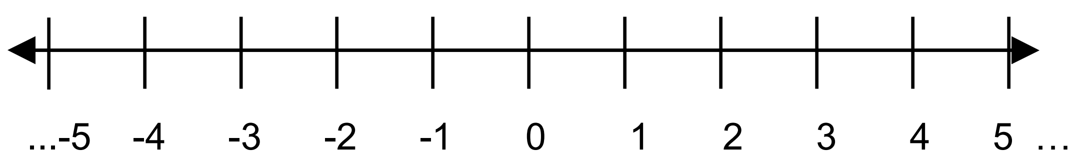
Con la aparición de las situaciones donde *hace falta para*, de déficit, de deuda y de equilibrio, arbitrariamente surgen las cantidades negativas. Cada uno de los números naturales tienen un opuesto, excepto el cero que es llamado el negativo de dicho número con ellos se forma un conjunto llamado de los enteros negativos, se nota por $Z^{(-)}$.

Ampliamos el conjunto de los números naturales con los enteros negativos y el cero, conformando el conjunto de los números enteros, el cuál se denota por Z.

$$Z = Z^{(-)} \cup \{ 0 \} \cup Z^{(+)}$$

$$Z = \{\ldots -8, -7, -6, -5, -4. -3, -2, -1, 0, 1, 2, , 4, 5, 6, 7, 8, \ldots \}$$

Los números enteros son un conjunto ordenado ascendentemente de izquierda a derecha, es decir de menor a mayor, los cuáles se representan en una recta llamada recta entera.



Para todo par de números enteros h y q, h es mayor que q siempre que la diferencia de h con respecto a q sea una cantidad positiva, es decir, si $(h, q) \in Z$, $h > q$ si y solamente si $(h - q) \in Z^{(+)}$.

En este conjunto se resuelven ecuaciones sencillas como por ejemplo:

$X + 7 = 3$, donde $X = -4$, $-4 \in Z$.

Hallemos el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a. La cantidad de artículos en un proceso de producción es un número entero negativo (F).
b. El valor del resultado del ejercicio de una compañía es un número entero (V).
c. Un sobregiro en una cuenta corriente puede ser un entero negativo (V).

Podemos en los enteros efectuar las operaciones de suma, resta y multiplicación.

123.895 – 245.665 + 842.007 – 1.978.003 + 503.448 = 1.469.350 – 2.223.668 = -754.318 $\in$ Z

(-24) (-23.005) (56) (-3) = -92.756.160 $\in$ Z.

La división no es posible en todos lo casos, la ecuación sencilla 3X = 1 no tiene solución en los enteros, ya que la solución es X = $\frac{1}{3} \notin$ Z, y en los enteros no existen inversos, por lo tanto, la solución se obtiene en otro conjunto numérico.

Conjunto de los Números Racionales

Tomar una parte o porción de un todo se convirtió en una necesidad que finalmente, fue el punto de partida para llegar a considerar las fracciones. Se llama fracción a un número de la forma:

$\frac{a}{b}$, con a, b $\in$ Z, b $\neq$ 0. b recibe el nombre de denominador y a de numerador.

Toda fracción $\frac{a}{b}$, tiene un inverso $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ = $\frac{b}{a}$ y es tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ = 1

Las fracciones se pueden expresar de una de las cuatro formas a saber:

1. Como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$
2. Como una razón de la forma a : b, se lee “a es a b”.
3. Como una expresión decimal, mediante la división de a sobre b.
4. Como un porcentaje, en forma decimal y multiplicada por cien.

Ejemplo.

Podemos aplicar lo anterior a situaciones del ambiente empresarial.

A. En un proceso de producción si de cada 4 artículos elaborados 3 salen sin defectos se dice que la razón de los artículos buenos con relación a los artículos producidos es 3 a 4. Si expresamos la fracción $\frac{3}{4}$ en forma decimal se obtiene:

$$\begin{array}{rl} 3 & \underline{/4} \\ 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Como $\frac{3}{4}$ = 0,75 decimos que el 75% de la producción no sale defectuosa.

B. Ejemplos de operaciones con racionales fraccionarios:

$$\frac{1}{4}-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}-\frac{15}{4}=\frac{1-7+3-15}{4}=\frac{-22+4}{4}=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2}$$

$$\frac{7}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}=\frac{105-20+36+50}{60}=\frac{-20+191}{60}=\frac{171}{60}=\frac{57}{20}$$

$$\left(-\frac{6}{25}\right)\left(\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{(-6)(15)(-2)}{25\bullet 4\bullet 3}=\frac{(-1)(3)(-1)}{5\bullet 1\bullet 1}=\frac{3}{5}$$

$$-\frac{5}{2}\div\frac{15}{4}=-\frac{5\bullet 4}{2\bullet 15}=-\frac{1\bullet 2}{1\bullet 3}=-\frac{2}{3}$$

Establecemos el conjunto de los racionales como el conjunto formado por todas las fracciones, se representa con la letra Q.

$$Q=\{x/x,\ x=\frac{a}{b}\text{ con } a,b\in Z\ ,b\neq 0\}$$

Cada uno de los números racionales, se expresa decimalmente de una y Sólo una de las tres siguientes formas:

a) Como un decimal finito
b) Como un decimal infinito periódico puro
c) Como un decimal infinito periódico mixto

Ejemplo.

$-\frac{3}{4} = -3 \div 4 = -0.75$ parte decimal finita 75

$\frac{27}{99} = \frac{3}{11} = 3 \div 11 = 0.272727...$ periodo 27. $\frac{3}{11} = 0,\overline{27}$

$-\frac{1475}{900} = -\frac{295}{180} = -\frac{59}{36} = -1.638888....$ parte decimal finita 63 parte periódica 8.

$-\frac{59}{36} = -1,63\bar{8}$

Todo número racional tiene una representación decimal, ya sea, decimal finita o decimal periódica. Todo número cuya representación decimal no cumple con lo anterior no es un número racional.

La sencilla ecuación $X^2 = 8$ no tiene solución en los racionales, ya que la solución es $x = \pm\sqrt{8} \notin Q$. Ésta es una cantidad decimal infinita pero no periódica, por lo tanto la solución se obtiene en otro conjunto numérico.

Conjunto de los números irracionales

Si queremos obtener la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 2, en los números racionales no la encontramos. Utilizando el teorema de Pitágoras podemos expresar su valor como $X^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, la solución sería $x = \sqrt{8} \notin Q$.

Existen otros números como 8 que **no** se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, estas expresiones corresponden a decimales infinitos no-periódicos; como no son racionales reciben el nombre de números irracionales, son irracionales por ejemplo:

–4,0100100010000100000100000001…

п = 3,141592654…

6,123456789101112131415161718192021…

$\sqrt{8}$ = 2,828427125…

e = 2,718281828…

$\sqrt[3]{131}$ = 5,078753078…

Todas las raíces de cualquier orden que sean inexactas. El conjunto de los números irracionales se representa mediante la letra I .

I = { x/x , x es un número cuya expresión decimal es infinita no- periódica}.

Las operaciones usuales de suma, resta, multiplicación y división no son cerradas en los irracionales, es decir no siempre dan un número irracional

$$3\sqrt{7} \in I, -3\sqrt{7} \in I \text{ pero } 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = 0 \notin I$$

$$5\sqrt{3} \in I, -4\sqrt{3} \in I \text{ pero } (5\sqrt{3})(-4\sqrt{3}) = -60 \notin I$$

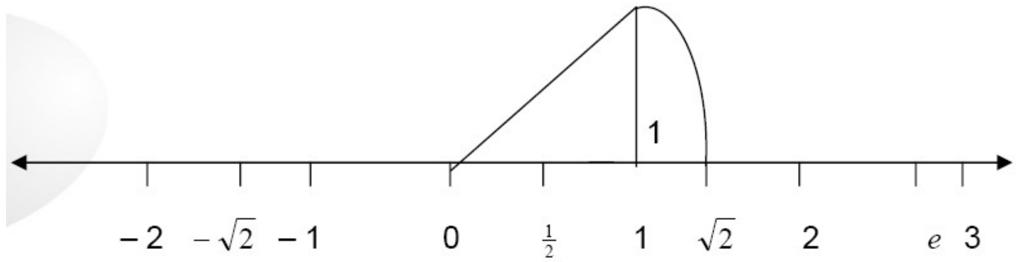
$$8\sqrt{3} \in I, -4\sqrt{3} \in I \text{ pero } (8\sqrt{3}) \div (-4\sqrt{3}) = -2 \notin I$$

Conjunto de los números reales

El conjunto de los números racionales Q está formado por todos los números que se pueden expresar decimalmente, como decimales finitos o decimales infinitos periódicos. El conjunto de los números irracionales (I) por todos los números que se expresan decimalmente, como decimales infinitos no-periódicos; luego los conjuntos Q e I son disjuntos $(Q \cap I = \varphi)$.Se conforma el conjunto de los números reales como la unión de los números racionales y los números irracionales. Se simboliza con R Luego $R = Q \cup I$.

Podemos decir que un **número real** es todo aquél que se puede expresar decimalmente.

Los números reales pueden ser representados en una recta horizontal llamada recta real, en donde se establece una correspondencia **biunívoca**, es decir, para cada punto existe un número real y para cada número real existe un punto en la recta, debido a que la cantidad de números reales, entre dos, es infinita. Usualmente, se ubican algunos de ellos en la representación en la recta, de acuerdo al valor que tengan los números a los cuales queremos hacer referencia. Para representar números irracionales en la recta real nos valemos del teorema de Pitágoras $\sqrt{2}$ = $1^2 + 1^2$.



Operaciones y propiedades fundamentales

Los números reales por sus características y por ser un conjunto demasiado denso, es cerrado para la gran mayoría de las operaciones, a la vez que satisface una serie de propiedades que permite en el mayor de los casos simplificar los resultados de las mismas. Se presenta a continuación una tabla donde veremos la operación y las propiedades que cumple dicha operación.

Operación / Propiedad	Suma	Resta	Multiplicación	División
Cerradura	x	X	x	x
Asociativa	x		x	
Conmutativa	x		x	
Modulativa	x		x	
Invertiva	x		x	
Distributiva (con respecto)			Suma y resta	Suma y resta

Algunas personas, en ciertas situaciones cotidianas, realizan con gran rapidez el cálculo operatorio aplicando propiedades de las operaciones para simplificar los resultados, por ello es importante en el desarrollo de situaciones problémicas la aplicación de dichas propiedades en su planteamiento y solución.

Potenciación
La potenciación es una operación que consiste en hallar el resultado *p* de multiplicar por sí misma la base *b* una cierta cantidad de veces *e.*

$b^e = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\text{e veces b}}$ = p, se lee "b elevado a la e"

Ejemplo.

$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$

$(745,68)^2 = (745,68)(745,68) = 556.038,8624$

$(2,43)^4 = (2,43)(2,43)(2,43)(2,43) = 34,8678$

En algunas potencias es más conveniente apoyarse en una calculadora. Para obtener $(82,47)^{2,5}$ se escribe inicialmente la base luego la tecla de elevar X^y ó $\wedge$ y por último la tecla =

$(82,47)^{2,5} = (82,47) \wedge 2,5 = 61.764,65023$ o

$(82,47)^{2,5} = (82,47) x^y\, 2,5 = 61.764,65023$

$(4,89)^{-3,4} = (4,89) \wedge -3,4 = 0,00453$ o $(4,89)^{-3,4} = (4,89) x^y -3,4 = 0,00453$

Como el exponente positivo indica que se habrá de multiplicar por sí misma tantas veces la base, el exponente negativo inversamente indicará que se habrá de dividir tantas veces por sí misma la base $b^{-e} = \dfrac{1}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots b}_{\text{e veces b}}} = \dfrac{1}{b^e}$.

$(4,89)^{-3,4} = \dfrac{1}{(4,89)^{3,4}} = 0,00453$

Propiedades

Es útil aplicar propiedades para simplificar el proceso operatorio.

a) Producto de potencias de igual base: Para multiplicar potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$(p)^m (p)^n (p)^r = (p)^{m+n+r}$$

b) Producto de potencias de igual exponente: Para multiplicar potencias de igual exponente, se multiplican las bases dejando el mismo exponente.

$$(p)^n (q)^n (r)^n = (p \cdot q \cdot r)^n$$

c) Cociente de potencias de igual base: Para dividir potencias de igual base se deja la misma base restando los exponentes.

$$\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}$$

d) Cociente de potencias de igual exponente: Para dividir potencias de igual exponente, se deja el mismo exponente haciendo el cociente de las bases.

$$\frac{q^n}{p^n} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$$

e) Potencia de un exponente elevado a otro exponente: Para elevar una potencia de un exponente a otro exponente se deja la misma base multiplicando los exponentes.

$$\left(q^m\right)^n = q^{m \cdot n}$$

Ejemplo.

$$\left[(-7{,}3)^5\right]^2 = (-7{,}3)^{10}$$

$$2^6 \cdot (5^2)^3 = 2^6 \cdot 5^6 = 10^6$$

$$(3{,}5)^3 (3{,}5)^{-2} (3{,}5)^{-4} = (3{,}5)^{-3} = \frac{1}{(3{,}5)^3}$$

$$\left(\frac{2x}{5{,}4}\right)^2 = \frac{4x^2}{29{,}16}.$$

Radicación

La radicación es una operación que consiste en hallar la base b que multiplicada una cierta cantidad de veces e es la potencia p.

Lo expresamos $e\sqrt{p} = \; b$ siempre que $b^e = p$, se lee "raíz e- ésima de p ".

Ejemplo.

$\sqrt[3]{-8} = -2$ ya que $(-2)^3 = 8$

$\sqrt[4]{625} = 5$ ya que $5^4 = 625$

El obtener raíces es más conveniente con el apoyo de una calculadora.

Para obtener $\sqrt[4]{27{,}9841}$ = 2,3 se escribe inicialmente 4 luego la tecla SHIFT después la tecla $\sqrt[x]{}$ ó $x^{1/y}$ 27,9841 y se obtiene 2,3 ya que $(2{,}3)^4$ = 27,9841.
Podemos establecer las raíces como potencias con exponente racional a partir de la siguiente definición:

Siempre que $b \neq 0$ se define $b^{\frac{m}{n}}$ = $\sqrt[n]{b^m}$ y se lee "raiz n-ésima de b elevado a la m".

De esta forma, se pueden justificar las propiedades de la radicación a partir de las de la potenciación.

Propiedades

a) Producto de raíces de igual radicando: El producto de raíces de igual radicando, es igual a una raíz de índice igual al producto de los índices anteriores del mismo radicando elevado a la suma de los índices.

$$\sqrt[m]{q} \cdot \sqrt[n]{q} = q^{\frac{i}{m}} q^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{n+m}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{q^{n+m}}$$

b) Producto de raíces de igual índice: El producto de raíces de igual índice ,es igual a una raíz del mismo índice del producto de los radicandos.

$$\sqrt[n]{q} \cdot \sqrt[n]{p} = q^{\frac{1}{n}} \cdot p^{\frac{1}{n}} = (q \cdot p)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p \cdot q}$$

c) Raíz de otra raíz: La raíz de otra raíz, es una raíz de índice igual al producto de los anteriores índices del mismo radicando.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{q}} = \left(q^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = q^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[m\cdot n]{q}$$

Ejemplo.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{7x^{12}}} = \sqrt[6]{7(x^2)^6} = x^2\sqrt[6]{7}$$

$$\frac{6\sqrt[3]{15}}{2\sqrt[3]{21}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$$

Logaritmación

La logaritmación es una operación que consiste en hallar la cantidad de veces e que la base b multiplicada por sí misma da una cierta potencia p.

Lo expresamos $Log_b\, p = e$ siempre que $b^e = p$ se lee "logaritmo en base b de p es igual a e".

Ejemplo.

$Log_3 81 = 4$ siempre que $3^4 = 81$

$Log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ siempre que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

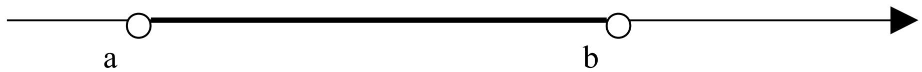
Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales, conocidos como *intervalos* se presentan con frecuencia en el cálculo y geométricamente corresponden a segmentos de recta. Por ejemplo, si a < b, entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b está integrado por todos los números que se encuentran entre a y b, y se denota mediante el símbolo (a, b). Utilizando la notación constructiva de conjuntos podemos escribir:

$$(a, b) = \{ x / a < x < b \}$$

Note que los puntos extremos a y b, no están incluidos en éste intervalo. Este hecho queda indicado por los paréntesis (   ) en la notación de intervalos y por círculos en blanco a nivel gráfico.

Ejemplo.



El **intervalo cerrado** entre a y b es el conjunto

$$[a, b] = \{ x / a \leq x \leq b \}$$

Aquí los puntos extremos de los intervalos han quedado incluidos. Esto se índica mediante corchetes [   ] en la notación de intervalos y con los círculos sólidos, como se muestra a continuación.

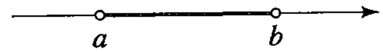
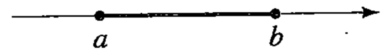
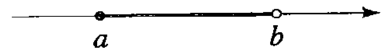
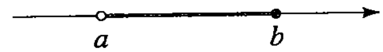
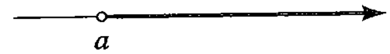
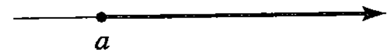
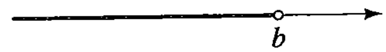
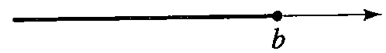
También es posible incluir sólo un punto extremo en un intervalo, como se mostrará más abajo en la tabla de intervalos.

Necesitamos considerar también intervalos infinitos como se muestra a continuación.

$$(a, \infty) = \{ x / x > a \}$$

Esto no significa que el ∞ ("infinito") sea un número. La notación (a, ∞) corresponde al conjunto de todos los números que son mayores que a, por lo que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende de manera indefinida en la dirección positiva.

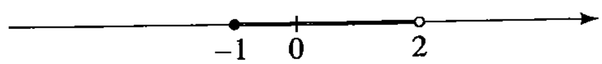
La siguiente tabla, lista los nueve tipos posibles de intervalos. Cuando estos se analicen, siempre supondremos que a < b.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leqslant x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

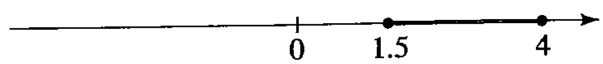
Ejemplo.

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y grafíquelos:

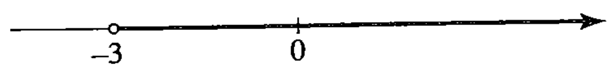
(a) $[-1, 2] = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\}$



(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leqslant x \leqslant 4\}$



(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



Determinación de uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto:

a. $(1, 3) \cap [2, 7]$

b. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

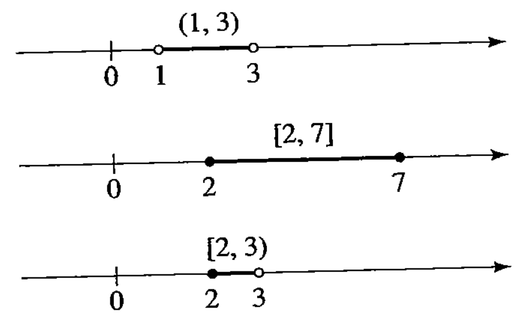
Solución

a. La intersección de dos intervalos está formada por los números que se encuentran en ambos, por lo tanto:

$(1, 3) \cap [2, 7] = \{ x / 1 < x < 3 \text{ y } 2 \leq x \leq 7 \}$

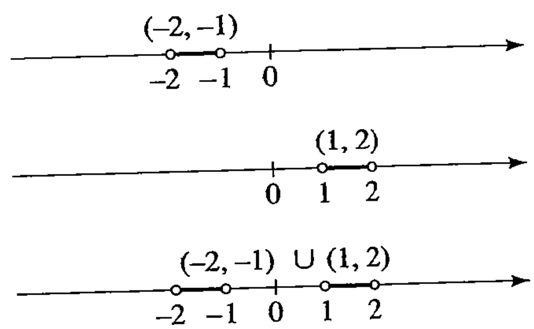
= { x/ 2 ≤ x < 3 }

= [2, 3)



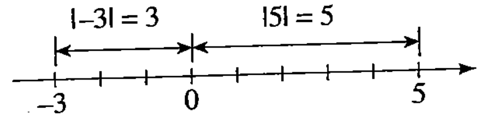
b. La unión de los intervalos (-2, -1) y (1, 2) la conforman los números que se encuentran ya sea en (-2, -1) o en (1, 2), por lo que:

(-2, -1) ∪ (1, 2) = { x/ -2 < x < -1 ó bien, 1 < x < 2 }



Valor Absoluto y Distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 (cero) en la recta de los números reales.



La distancia es siempre positiva ó 0 (cero), por lo que tenemos que $|a| \geq 0$ para todo número a. Al recordar que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la definición siguiente:

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de es:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

(a) $|3| = 3$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

(d) Si $x \geqslant 4$, entonces $|x - 4| = x - 4$ (puesto que en este caso $x - 4 \geqslant 0$)

(e) Si $x < 4$, entonces $|x - 4| = -(x - 4) = 4 - x$ (puesto que en este caso $x - 4 < 0$)

Al aplicar la definición de valor absoluto se pueden demostrar las siguientes propiedades:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Descripción
1. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto
2. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4. $\lvert a^n \rvert = \lvert a \rvert^n$	El valor absoluto de una potencia es la potencia del valor absoluto.

Ejemplo

Simplificación del valor absoluto en una expresión.

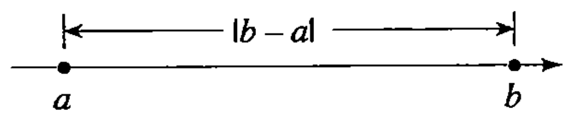
(a) $|-4 - x^2| = |-(4 + x^2)| = |4 + x^2| = 4 + x^2$ — Propiedad 1 y el hecho de que $4 + x^2 > 0$

(b) $|2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$ — Propiedad 2

Distancia entre puntos en la recta real

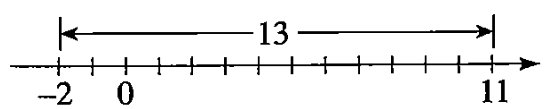
Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta real es

$$d(a, b) = |b - a|$$



Ejemplo.

¿Cuál es la distancia entre los números -2 y 11 en la recta real? A partir de la figura 10 vemos que la distancia es 13. Obtendríamos esto calculando $|11 - (-2)| = 13$ o bien $|(-2) - 11| = 13$. Partiendo de esta observación, podemos hacer la siguiente definición

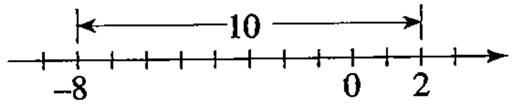


Ejemplo.

La distancia entre lo números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos verificar este cálculo geométricamente, como se muestra



EJERCICIOS

33-48 ▪ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo. Suponga que todas las letras indican números positivos.

33. $x^{2/3}x^{1/5}$

34. $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

35. $(4b)^{1/2}(8b^{2/5})$

36. $(8x^6)^{-2/3}$

37. $(c^2d^3)^{-1/3}$

38. $(4x^6y^8)^{3/2}$

39. $(y^{3/4})^{2/3}$

40. $(a^{2/5})^{-3/4}$

41. $(2x^4y^{-4/5})^3(8y^2)^{2/3}$

42. $(x^{-5}y^3z^{10})^{-3/5}$

43. $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$

44. $\left(\dfrac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

45. $\left(\dfrac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$

46. $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$

47. $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$

48. $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$

15-32 ▪ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente negativo.

15. t^7t^{-2}

16. $(4x^2)(6x^7)$

17. $(12x^2y^4)(\frac{1}{2}x^5y)$

18. $(6y)^3$

19. $\dfrac{x^9(2x)^4}{x^3}$

20. $\dfrac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

21. $b^4(\frac{1}{3}b^2)(12b^{-8})$

22. $(2s^3t^{-1})(\frac{1}{4}s^6)(16t^4)$

23. $(rs)^3(2s)^{-2}(4r)^4$

24. $(2u^2v^3)^3(3u^3v)^{-2}$

25. $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

26. $\dfrac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$

33-38 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y grafíquelo.

33. $(-3, 0)$

34. $(2, 8]$

35. $[2, 8)$

36. $[-6, \frac{1}{2}]$

37. $[2, \infty)$

38. $(-\infty, 1)$

39-44 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y realice las gráficas correspondientes.

39. $x \leqslant 1$

40. $1 \leqslant x \leqslant 2$

41. $-2 < x \leqslant 1$

42. $x \geqslant -5$

43. $x > -1$

44. $-5 < x < 2$

45-50 ■ Grafique el conjunto.

45. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$

46. $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

47. $[-4, 6] \cap [0, 8)$

48. $[-4, 6) \cup [0, 8)$

49. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

50. $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

51-54 ■ Evalúe cada una de las expresiones.

51. (a) $|100|$ (b) $|-73|$

52. (a) $|-8 - (-2)|$ (b) $|\pi - 10|$

53. (a) $\big||-6| - |-4|\big|$ (b) $\dfrac{-1}{|-1|}$

54. (a) $\big|2 - |-12|\big|$ (b) $-1 - \big|1 - |-1|\big|$